

SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA

CONCORSO DI AMMISSIONE AL I ANNO
DEI CORSI ORDINARI DI PRIMO LIVELLO
E A CICLO UNICO A.A. 2025-2026

CLASSE DELLE SCIENZE SPERIMENTALI PROVA DI MATEMATICA E LOGICA (c)

(Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

Non sono ammessi libri, calcolatrici, cellulari né altri apparecchi elettronici

1. Sia Alice che Beatrice che Carlo hanno visitato 14 delle 20 regioni italiane. Dimostrare che c'è una regione che è stata visitata da tutti e tre.
2. Dimostrare che esiste una unica coppia di interi non negativi x, y tali che

$$\frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} = 2025.$$

3. In un gioco d'azzardo si lanciano 5 dadi. Per ogni 6 uscito si vincono 9 soldi, per ogni altro numero si perdono 2 soldi. Ad esempio se esce 6,1,6,3,1 si guadagnano 12 soldi, se esce 5,1,4,4,2 si perdono 10 soldi. E' un gioco conveniente? Mostrare che in una singola giocata la probabilità di guadagnare è più grande della probabilità di perdere.
4. Sappiamo che $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ sono numeri irrazionali (significa che non si possono esprimere come rapporto di numeri interi). Mostrare che $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ è irrazionale.
5. Dato un insieme di tre numeri distinti $A = \{a, b, c\}$, consideriamo l'insieme $A' = \{\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\}$ formato dalle loro medie aritmetiche. Partendo dall'insieme $A_0 = \{1, 2, 4\}$ si itera questo procedimento indefinitamente ottenendo gli insiemi $A_1 = A'_0 = \{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\}$, $A_2 = (A_1)'$, $A_3 = (A_2)'$, ...

Mostrare che scelto un qualunque elemento $a_n \in A_n$ si ha $a_n \rightarrow \frac{7}{3}$ per $n \rightarrow +\infty$.

6. Si consideri una quadrettatura del piano cartesiano formata da quadratini di lato 1 (cioè l'unione delle rette orizzontali $y = k$ e verticali $x = h$ con h, k numeri interi). Si consideri il cerchio pieno (disco) C_n di centro l'origine e raggio n con n intero positivo. Sia ℓ_n la lunghezza totale della quadrettatura all'interno di C_n . Verificare che $\ell_1 = 4$ e $\ell_2 = 8 + 8\sqrt{3}$. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell_n}{n^2}.$$